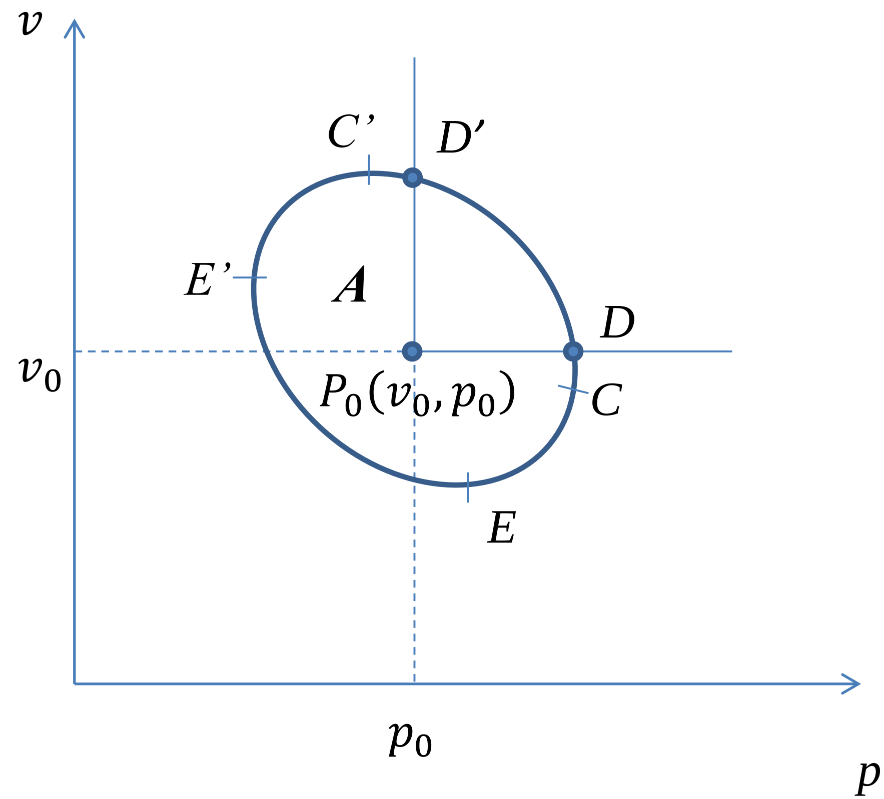
Методы оптимизации сети мобильной связи

Понятие о множестве Парето

Множество A всех решений, соответствующих условию задачи, называют множеством допустимых решений.

Множество P таких решений, для которых невозможно одновременное улучшение всех критериев, называют множеством Парето.

Всякое дальнейшее улучшение одного критерия может быть осуществлено только за счет ухудшения других.



Дуга CC' – множество решений, удовлетворяющих критерию максимизации параметров v и p; дуга EE' – их минимизации

Проблематика оптимизации по Парето:

Задача 1: получения множества Парето

Задача 2: выбора наилучшей альтернативы из этого множества.

Множество решений X отображается множеством векторных оценок Y, по которым можно судить о превосходстве одного решения над другим (выявить предпочтения).

Векторные оценки связаны с критериями через шкалы допустимых преобразований и содержат компоненты y_i, представляющие собой совокупность чисел в соответствии с набором критериев Φ_i, $i = 1,2,\ldots,m$.

Аксиомы Парето

Сильная аксиома: На множестве оценок Y имеет место отношение нестрогого предпочтения

$$\vec{y} \geqq \overrightarrow{y'} \left(\vec{y}, \overrightarrow{y'} \in Y\right),$$

если для $y_i (y_i \in \vec{y})$ и $y'_i (y'_i \in \vec{y})$ при $i = 1, 2, \ldots, m$ выполняются неравенства $y_i \geqq y'_i$, причем хотя бы одно из них строгое.

Слабая аксиома: на множестве оценок Y имеет место отношение строгого предпочтения

$$\vec{y} > \overrightarrow{y'} \left(\vec{y}, \overrightarrow{y'} \in Y\right),$$

если для $y_i (y_i \in \vec{y})$ и $y'_i (y'_i \in \vec{y})$ при $i = 1, 2, \ldots, m$ выполняются строгие неравенства $y_i > y'_i$

Оценку $\vec{y}^*$ называют наилучшей по $\geqq$, если ля любой $\vec{y} \in Y$ справедливо $\vec{y}^* \geqq \vec{y}$.

Может существовать только одна такая точка $\vec{y}^*$, так как отношение $\geqq$ является частичным порядком. Но в реальных задачах такую оценку $\vec{y}^*$ получить не удается, так как не все компоненты y_i двух решений $\vec{y}$ и $\overrightarrow{y'}$ находятся в заданном отношении R, поэтому используются оценки, максимальные по $\geq$ и $>$.

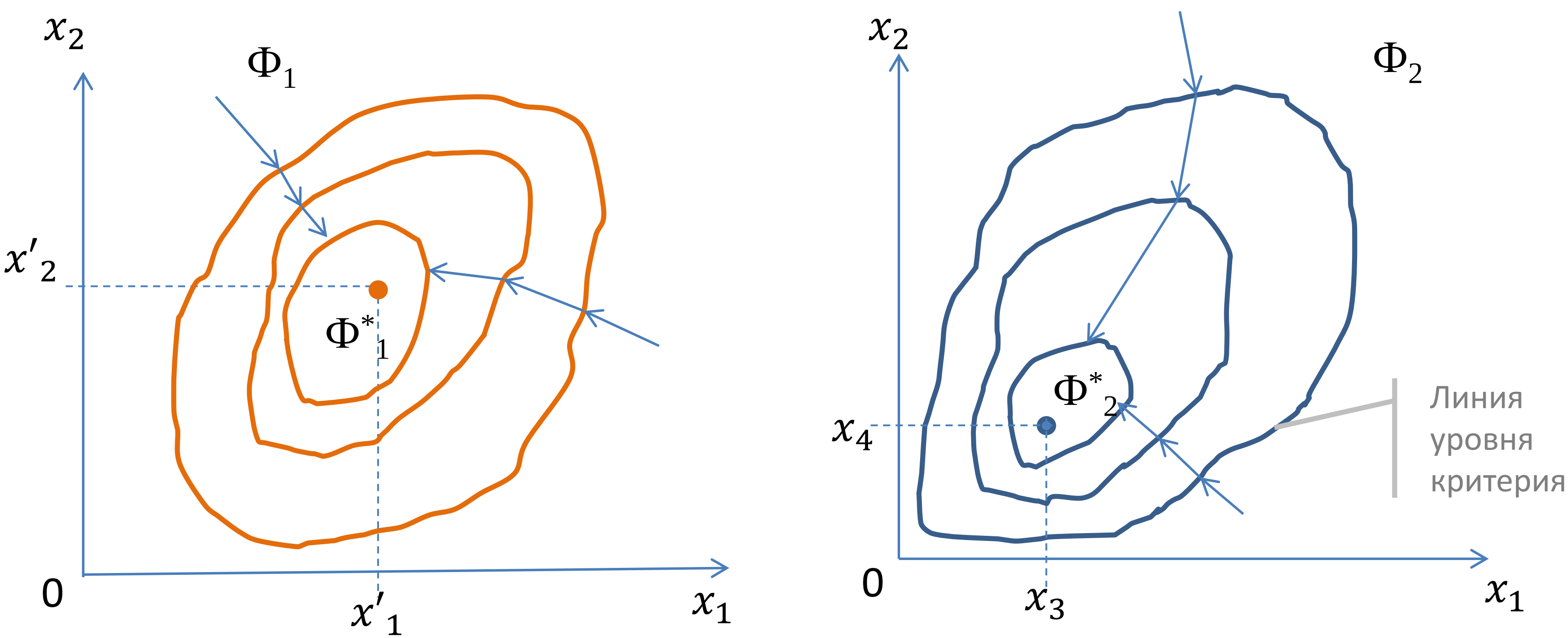
Определение 1: оценка $\vec{y}^0 \in Y$ называется максимальной по $\geq$ (или $>$) относительно Y, если не существует оценки $\vec{y} \in Y$, такой, что $\vec{y} \geq \vec{y}^0$ (или $\vec{y} > \vec{y}^0$) - или оптимальной по Парето. Множество таких оценок $P(Y)$ называют эффективным множеством или множеством Парето.

Определение 2: оценка, максимальная по $>$, называется слабо эффективной (или слабо оптимальной по Парето, или слабым оптимумом Парето, оптимальной по Слейтеру). Множество всех таких оценок Ps называется слабо эффективным.

Отношения $\geqq$, $\geq$ и $>$, определенные на множестве оценок, порождают аналогичные по смыслу отношения на множестве решений.

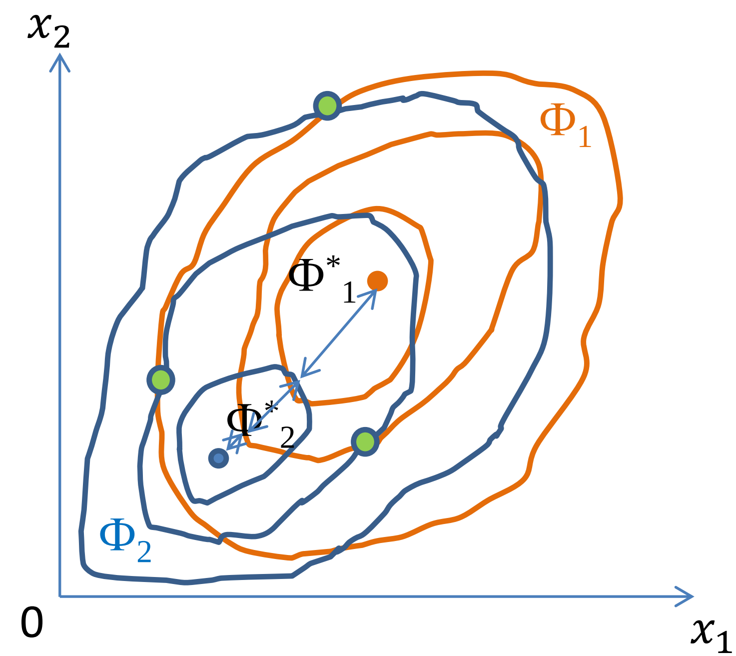
- Решение $\vec{x}^0 \in X$ эффективно, если не существует решения $\vec{x} \in X$, для которого $\Phi(\vec{x}) \geq \Phi(\vec{x}^0)$.
- Решение $\vec{x}^0 \in X$ слабо эффективно, если не существует решения $\vec{x} \in X$, для которого $\Phi(\vec{x}) > \Phi(\vec{x}^0)$.

Если множество эффективных решений $P_\Phi(X)$, множество слабо эффективных $P_{S\Phi}(X)$, тогда $P_\Phi(X) \subseteq P_{S\Phi}(X)$



Градиент – это вектор, направленный в сторону наибольшего изменения показателя качества:

$$\operatorname{grad}\Phi_i(\vec{x}) = \left[\frac{\partial\Phi_i(\vec{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\Phi_i(\vec{x})}{\partial x_y}, \dots, \frac{\partial\Phi_i(\vec{x})}{\partial x_n}\right]$$



Пример: между точками градиенты противонаправлены, что говорит о противоположности целей. Следовательно, все точки, принадлежащие этому отрезку, составляют множество Парето:

$$\mu\frac{d\Phi_1}{\overrightarrow{dx}} = -\frac{d\Phi_2}{\overrightarrow{dx}},$$

$$\mu \operatorname{grad}\Phi_1(\vec{x}) = -\operatorname{grad}\Phi_2(\vec{x})$$

где μ - масштабирующий коэффициент, учитывающий неравенство модулей градиентов.

Для двухкритериальной задачи:

$$\mu\frac{d\Phi_1}{\overrightarrow{dx}} + \frac{d\Phi_2}{\overrightarrow{dx}} = 0$$

Для множества Парето сумма взвешенных градиентов равна нулю.

Утверждение: точка $\vec{x}$ множества допустимых решений X принадлежит множеству Парето, если существует весовой вектор

$$\vec{\mu} = \{\mu_i | \mu_i \in \vec{\mu}; \mu_i > 0; i = 1,2, \ldots, m\} \in M$$

такой, что сумма градиентов показателей качества Φ_i в пространстве параметров X равна нулю.

При этом:

$$M = \{\vec{\mu} \in R^m | \mu_i > 0, \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1\}$$

Таким образом, в точках, принадлежащих множеству Парето, наблюдается равновесие, отклонение от которого не улучшает решение, так как дальнейшая минимизация одного критерия приводит к максимизации другого.

Необходимые и достаточные условия эффективности решения

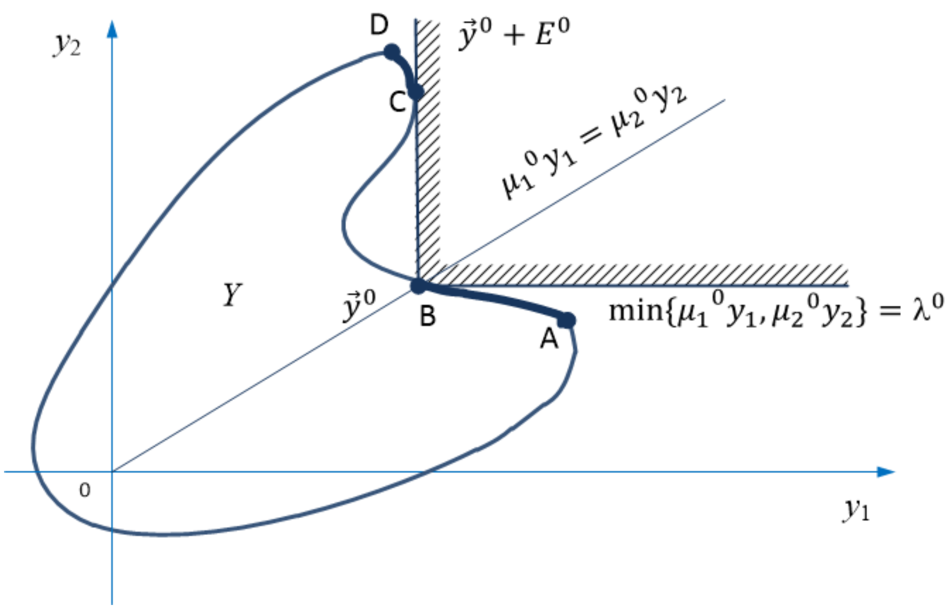
1. Условие, достаточное для эффективности, является достаточным и для слабой эффективности; условие, необходимое для слабой эффективности, оказывается необходимым и для эффективности.
2. Исследуемое множество решений полагается непустым и замкнутым, т.е. содержит по крайней мере одну точку, принадлежащую множеству Парето. Все точки, не принадлежащие множеству Парето, могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения без ущерба для конечного результата.
3. Если множество не является замкнутым, то существует множество эффективных решений, располагающееся на граничных точках замыкания множества.
4. Каждой эффективной точке соответствует наилучшее возможное значение каждого из показателей качества Φ_i при фиксированных значениях всех остальных.
5. Эффективное множество решений строго монотонно по любому из критериев при фиксированных значениях всех остальных.

Свойства эффективных и слабо эффективных решений и оценок

- **Свойства слабо эффективных (эффективных по Слейтеру) оценок**

1. Оценка $\vec{y}^0 \in Y (x_i > 0)$ слабо эффективна тогда и только тогда, когда существует вектор $\vec{\mu}$ такой, что

$$\min_i \mu_i \, {y_i}^0 = \max_{\vec{y} \in Y} \min_i \mu_i \, y_i$$



Для слабо эффективной оценки $\vec{y}^0 \in Y$ можно принять $\vec{\mu} = \vec{\mu}^0$, где $\vec{\mu}^0$ имеет компоненты:

$$\mu^0 = \frac{\lambda^0}{{y_i}^0}, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\lambda^0 = 1/\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{{y_k}^0}.$$

Тогда $\max_{\vec{y} \in Y} \min_i \mu_i{}^0 \, y_i = \lambda_0$.

2. Пусть $\vec{y}^0 = [{y_1}^0, \dots, {y_i}^0, \dots, {y_m}^0]^T (y_0 \in Y)$, а $\varphi_i \ (i = 1,2, \dots, m)$ - возрастающие функции одной переменной, и $\varphi_1({y_1}^0) = \cdots = \varphi_i({y_i}^0) = \cdots = \varphi_m({y_m}^0)$. Тогда оценка $\vec{y}^0$ слабо эффективна, если

$$\varphi_1({y_1}^0) = \max_{\vec{y} \in Y} \min_i \varphi_i({y_i}^0)$$

На практике часто используют функции вида $\varphi_i(y_i) = y_i - {y_i}^0$, тогда оценка оказывается слабо эффективной при $\max\limits_{\vec{y} \in Y} \min\limits_i (y_i - {y_i}^0) = 0$.

3. Если функция $\varphi(\vec{y})$ возрастает (убывает) по > на множестве Y, то любая ее точка максимума (минимума) на Y слабо эффективна.

4. Пусть φ_0 - возрастающая по >, а $\varphi_j (j = 1,2, \dots, p)$ - неубывающие по > на Y функции. Если оценка $\vec{y}^0 \in Z$, где $Z = \left\{\vec{y} \in Y \middle| \varphi_j(\vec{y}) \geqq t_j, j = 1,2, \dots, p\right\}$, а t_j - произвольные фиксированные числа, является слабо эффективной, если удовлетворяет условию:

$$\varphi_0(\vec{y}^0) = \max_{\vec{y} \in Y} \varphi_0(\vec{y})$$

- **Свойства эффективных оценок.**

1. Оценка $\vec{y}^0 \in Y$ эффективна, если для каждого $(i = 1,2,\dots,m)$ выполняется $y_i{}^0 = \max\limits_{\vec{y} \in Y^{(i)}} y_i$, где $Y^{(i)} = \left\{\vec{y} \in Y \middle| y_j \geq y_j{}^0, j = 1,2,\dots,p; i \neq j\right\}$

2. Пусть функция $\varphi(\vec{y})$ не убывает по $\geq$ на Y, а $\vec{y}^0$ - ее точка максимума на Y. Для эффективности $\vec{y}^0$ достаточно выполнения одного из условий:
   - φ возрастает по $\geq$ на Y
   - $\vec{y}^0$ - единственная точка максимума φ_0 на Z

3. Пусть φ_{j}, $j=0,1,\dots,p$, $(p \geq 1)$ неубывающие по $\geq$ на Y функции. Если $\vec{y}^0 \in Z$, где $Z = \left\{\vec{y} \in Y \middle| \varphi_j(\vec{y}) \geqq t_j, j = 1,2,\dots,p\right\}$, удовлетворяет условию

$$\varphi_0(\vec{y}^0) = \max_{\vec{y} \in Z} \varphi_0(\vec{y})$$

   То для ее эффективности достаточно выполнения одного из условий:
   - φ_0 возрастает по $\geq$ на Z
   - $\vec{y}^0$ - единственная точка максимума φ_0 на Z

Вид функции $\varphi(\vec{y})$	Область изменения входящих величин	Характер изменения функции по локальному критерию	Принадлежность к множеству Парето (эффективность)
$\sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$	$\mu_i > 0; \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$	Возрастающая на числовой прямой	Любая точка максимума на $Y \in R_{\geqq}{}^{m}$
$\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i {y_i}^{S}\right)^{\frac{1}{S}}$	S>0; $\mu_i > 0$; $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$	Возрастающая на множестве неотрицательных чисел	
	S<0	Возрастающая на множестве положительных чисел	Любая точка максимума на $Y \in R_{>}{}^{m}$
$\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i ({y_i}^{*} - y_i)^{S}\right)^{\frac{1}{S}}$	S>0; $\mu_i > 0$; ${y_i}^{*} \geqq \sup y_i \ \forall i$ S<0; ${y_i}^{*} > \sup y_i$	Убывает по $\geq$ на Y	
$\max \mu_i ({y_i}^{*} - y_i)$	y^{*} – произвольные фиксированные числа; $\mu_i \geqq 0$	Невозрастающая по $\geq$ на R^m	Если точка мини-мума на Y един-ственная, то она эффективна
$\prod_{i=1}^{m} {y_i}^{\mu_i}$	$\mu_i > 0$	Возрастающая на множестве неотри-цательных чисел	Точка максимума y^0 на $Y \in R_{>}{}^{m}$
$\prod_{i=1}^{m} ({y_i}^{*} - y_i)^{\mu_i}$	${y_i}^{*} \geqq \sup y_i;\ y \in Y$; $\mu_i > 0$	Убывает по $\geq$ на Y	Любая точка минимума на Y

- **Условие оптимальности для вогнутых задач**

Задача оптимизации называется вогнутой, если множество альтернатив X выпукло, а все критериальные функции $\Phi_i(\vec{x})$ вогнуты. Множество критериев G_Φ и множество оценок Y оказываются выпуклыми.

1. Для слабой эффективности точки $\vec{x}^0 \in X$ необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор $\vec{\mu} \in M$, при котором верно

   $$\left(\vec{\mu}, \overrightarrow{\Phi}(\vec{x}^0)\right) = \max_{\vec{x} \in X}\left(\vec{\mu}, \overrightarrow{\Phi}(\vec{x})\right)$$

   где $\left(\vec{x}, \overrightarrow{\Phi}\right)$ - скалярное произведение; $M = \{\vec{\mu} \in R^m | \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1\}$

   Т.е. всякая слабо эффективная точка является решением однокритериальной вогнутой задачи максимизации функции $(\vec{\mu}, \overrightarrow{\Phi}(\vec{x}))$ при некотором $\vec{\mu} \in M$; и наоборот, каждое решение такой задачи есть слабо эффективная точка.

- **Линейная многокритериальная задача**

Задача называется линейной, если вектор-функция

$\vec{\Phi}(\vec{x}) = \left[\left(\vec{C}^{(1)}, \vec{x}\right), \left(\vec{C}^{(2)}, \vec{x}\right), \dots, \left(\vec{C}^{(m)}, \vec{x}\right)\right]^T; \vec{C}^{(j)} \in R^n; j = 1, \dots, k$

линейна, а множество решений X задано конечной системой линейных неравенств: $X = \left\{\vec{x} \in R^n \middle| \left(\vec{a}^{(j)}, \vec{x}\right) \leq b_j, j = 1, \dots, k\right\}$,

где $\vec{a}^{(j)} \in R^n$, $b^{(j)} \in R$, $j = 1, \dots, k$ и поэтому полиэдрально.

1. Для того, чтобы в линейной задаче точка $\vec{x}^0 \in X$ была эффективной, необходимо и достаточно, чтобы для векторов $\vec{\lambda} \in R_{\geqq}{}^k$ и $\vec{\mu} \in M$ выполнялись равенства:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{C}^{(i)} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \vec{a}^{(j)}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(b_j - \left(\vec{a}^{(j)} \vec{x}^0\right)\right) = 0$$

- **Условия оптимальности двухкритериальных задач**

Парето-оптимальность двухкритериальных задач при $\overrightarrow{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2]^{\mathrm{T}}$ основывается на знаниях о верхней (sup) и нижней (inf) границах критериев Φ_1 и Φ_2 на множестве эффективных решений.

Если $P_\Phi(X) \neq 0$, то

$$\sup_{\vec{x} \in P_\Phi(X)} \Phi_i(\vec{x}) \leqq \sup_{\vec{x} \in X} \Phi_i(\vec{x}),\, i = 1,2$$

Если $\vec{y}^0 \in Y$ и ${y_1}^0 = \max\limits_{\vec{y} \in P(Y)} y_1$, то для второй координаты справедливо ${y_2}^0 = \min\limits_{\vec{y} \in P(Y)} y_2$.

Решение $\vec{x}^0$ принадлежит множеству Парето $P_\Phi(X)$ только тогда, когда точка $\vec{x}^0$ является единственным решением скалярной задачи $\max\limits_{\vec{x}} \left\{\Phi_1(\vec{x}) \middle| \vec{x} \in X, \Phi_2(\vec{x}) \geqq \alpha\right\}$ или $\max\limits_{\vec{x}} \{\vec{\mu}\Phi_1(\vec{x}) + (1 - \vec{\mu})\Phi_2(\vec{x})\}$при $\alpha \in [a_2, b_2]$.

Здесь $a_2 = \begin{cases} \sup\{\Phi_2(\vec{x}) | \vec{x} \in {X_1}^*\}, \text{при } {X_1}^* \neq 0 \\ \inf\{\Phi_2(\vec{x}) | \vec{x} \in X\} \text{ в противном случае,} \end{cases}$

$b_2 = \sup_{\vec{x} \in X} \Phi_2(\vec{x})$

Формирование множества допустимых вариантов сети на основе морфологического подхода

- Выявление перечня основных функций системы и ее декомпозиция по функциональным признакам

$$\{\varphi_l, l = 1, L\}$$

- Определение альтернативных способов реализации каждой из подсистем и задание допустимых вариантов их построения

$$\Phi_l=\{\varphi_l, \varphi_l, \ldots, \varphi_{l_{K_l}}\}$$

- Формирование вариантов построения сети в целом на основе морфологических классов – множества вариантов построения каждой подсистемы, для которых выполняются условия:

$$\sigma(l) = \Phi_l, l = 1, L, \sigma(l) \cap \sigma(j) = 0$$

- Количество возможных вариантов сети определяется как:

$$Q = \prod_{l=1}^{L} K_l$$

Морфологическая таблица формирования множества допустимых вариантов сети

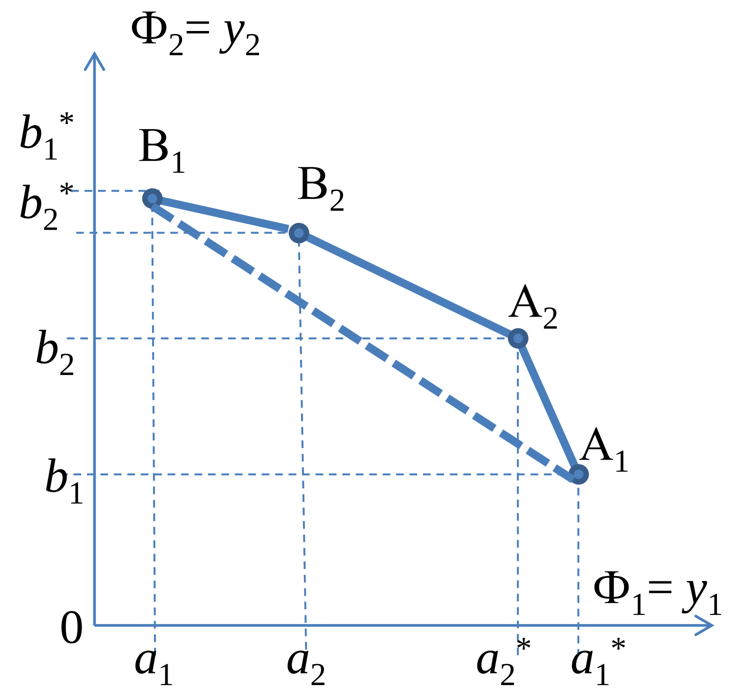
Морфологические классы	Возможные способы реализации подсети	Количество способов реализации сети
$\sigma(1)$	$\varphi_{11}\ \varphi_{12}\ \varphi_{13} \cdots \varphi_{1_{K_l}}$	K_1
$\sigma(2)$	$\varphi_{21}\ \varphi_{22}\ \varphi_{23} \cdots \varphi_{2_{K_l}}$	K_2
…	…	…
$\sigma(l)$	$\varphi_{l1}\ \varphi_{l2}\ \varphi_{l3} \cdots \varphi_{l_{K_l}}$	K_l
…	…	…
$\sigma(L)$	$\varphi_{L1}\ \varphi_{L2}\ \varphi_{L3} \cdots \varphi_{L_{K_l}}$	K_L

Могут существовать ограничений на объем исходного множества, задаваемые временем или стоимостью проектирования, и ведущие к неполноте морфологической таблицы

Методы построения множества Парето

- **<u>Метод последовательных приближений</u>**

1. Положим $\Phi_1 = a_1$ и $\Phi_2 = b_1$, где a_1 и b_1 принадлежат множеству оценок и $\vec{x} \in X$ – множество альтернатив.



2. Решим оптимизационные задачи:
   $$\Phi_1(\vec{x}) \to \max;\ \vec{x} \in X, \Phi_2(\vec{x}) = b_1$$
   $$\Phi_2(\vec{x}) \to \max;\ \vec{x} \in X, \Phi_1(\vec{x}) = a_1$$
   которые позволяют получить точки $A_1(a_1^*, b_1)$ и $B_1(a_1, b_1^*)$, лежащие на множестве Парето.

3. Через точки A_1 и B_1проведем прямую, которая будет первым приближением Парето

4. Второе приближение получим после решения двух оптимизационных задач при выборе других точек из множества оценок a_2 и b_2:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_1(\vec{x}) \to \max;\ \vec{x} \in X, \Phi_2(\vec{x}) = b_2 \\ \Phi_2(\vec{x}) \to \max;\ \vec{x} \in X, \Phi_1(\vec{x}) = a_2\end{array}\right\} a_2, b_2 \in G_\Phi$$

   Это позволяет получить точки $A_2(a_2^*, b_2)$ и $B_2(a_2, b_2^*)$.

5. Линия $A_1A_2B_1B_2$ является вторым приближением множества Парето. Этого обычно оказывается достаточно для решения практических задач.
6. При необходимости получения более точного результата задача решается аналогично на каждом из отрезков.

- ✓ Задача оптимизации решается относительно конкретных критериев Φ_1 и Φ_2
- ✓ Данный метод позволяет решить только вогнутые (выпуклые) задачи.

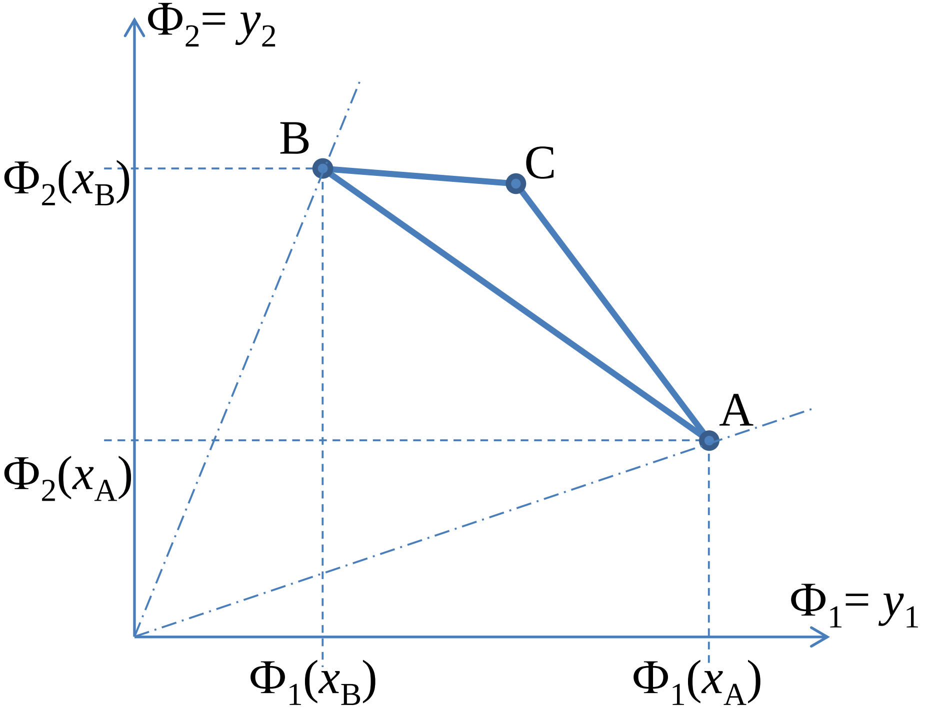
- **Метод взвешенной суммы**

Если критерии $\Phi_j = \left(\vec{C}^{(j)}, \vec{x}\right)$ являются линейными функциями, то координату j-ой точки множества Парето определяет совокупность чисел Φ_i, получаемых из решения оптимизационной задачи:

$$\left(\vec{\mu}, \overrightarrow{\Phi}\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu_{ij} \Phi_i(\vec{x}) \to \max_{\vec{x} \in X};\ \mu_{ij} > 0;\ \sum_{i=1}^{m} \mu_{ij} = 1$$

Следствия:

1. Всегда существуют такие $\vec{\mu}$, для которых все точки $\vec{x}_\mu$ эффективны и дают один и тот же неулучшаемый вектор результатов.
2. Изменяя $\vec{\mu}$ можно получить все множество



- Алгоритм аппроксимации множества Парето:

1. Находим первую точку $\mathrm{A}\big(\Phi_1(\vec{x}_\mathrm{A}), \Phi_2(\vec{x}_\mathrm{A})\big)$ как решение задачи:

$$\mu_1\Phi_1(\vec{x}) + \mu_2\Phi_2(\vec{x}) \to \max_{\vec{x}\in X}, \ \mu_1 + \mu_2 = 1.$$

2. Находим вторую точку $\mathrm{B}\big(\Phi_1(\vec{x}_\mathrm{B}), \Phi_2(\vec{x}_\mathrm{B})\big)$ как решение задачи:

$$\mu'_1\Phi_1(\vec{x}) + \mu'_2\Phi_2(\vec{x}) \to \max_{\vec{x}\in X}, \ \mu'_1 + \mu'_2 = 1.$$

3. Получаем прямую AB, которая является первым приближением множества Парето.
4. Аналогично можно получить точку C, тогда ABC представляет собой второе приближение множества Парето.
5. И т.д. Увеличивая число точек можно построить многогранник, аппроксимирующий выпуклое множество Парето.

✓ Задача максимизации решается относительно агрегированного критерия.

- **<u>Метод минимакса</u>**

Решается задача:

$$\min_{\vec{x}} \max_{i} \{\mu_i, \Phi_i(\vec{x})\}, \vec{\mu} \in M$$

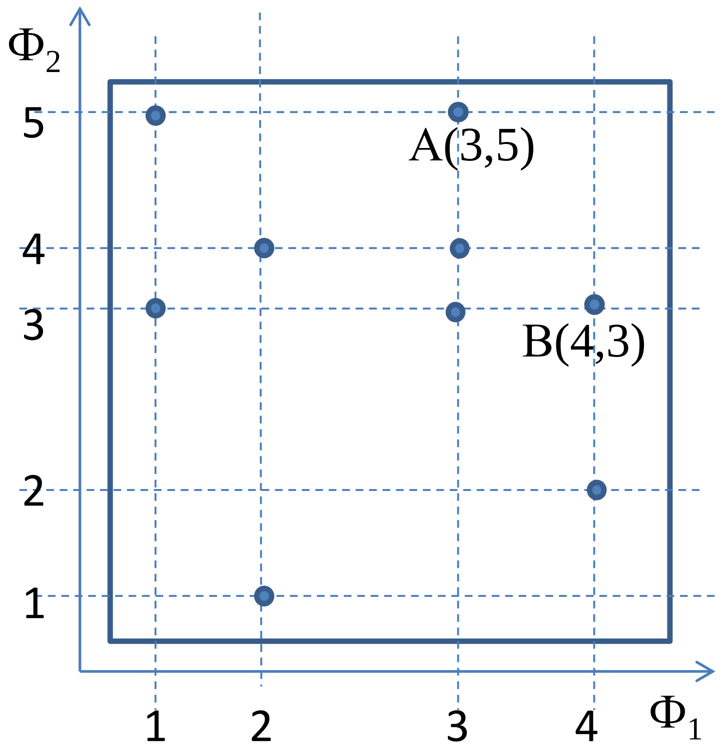
В которой методом подбора весового вектора $\vec{\mu} = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ можно найти всё множество Парето.

✓ Минимаксная оптимизация позволяет получить точки Парето для любых задач

✓ Эквивалентна задаче условной оптимизации и в вычислительно сложнее метода взвешенной суммы.

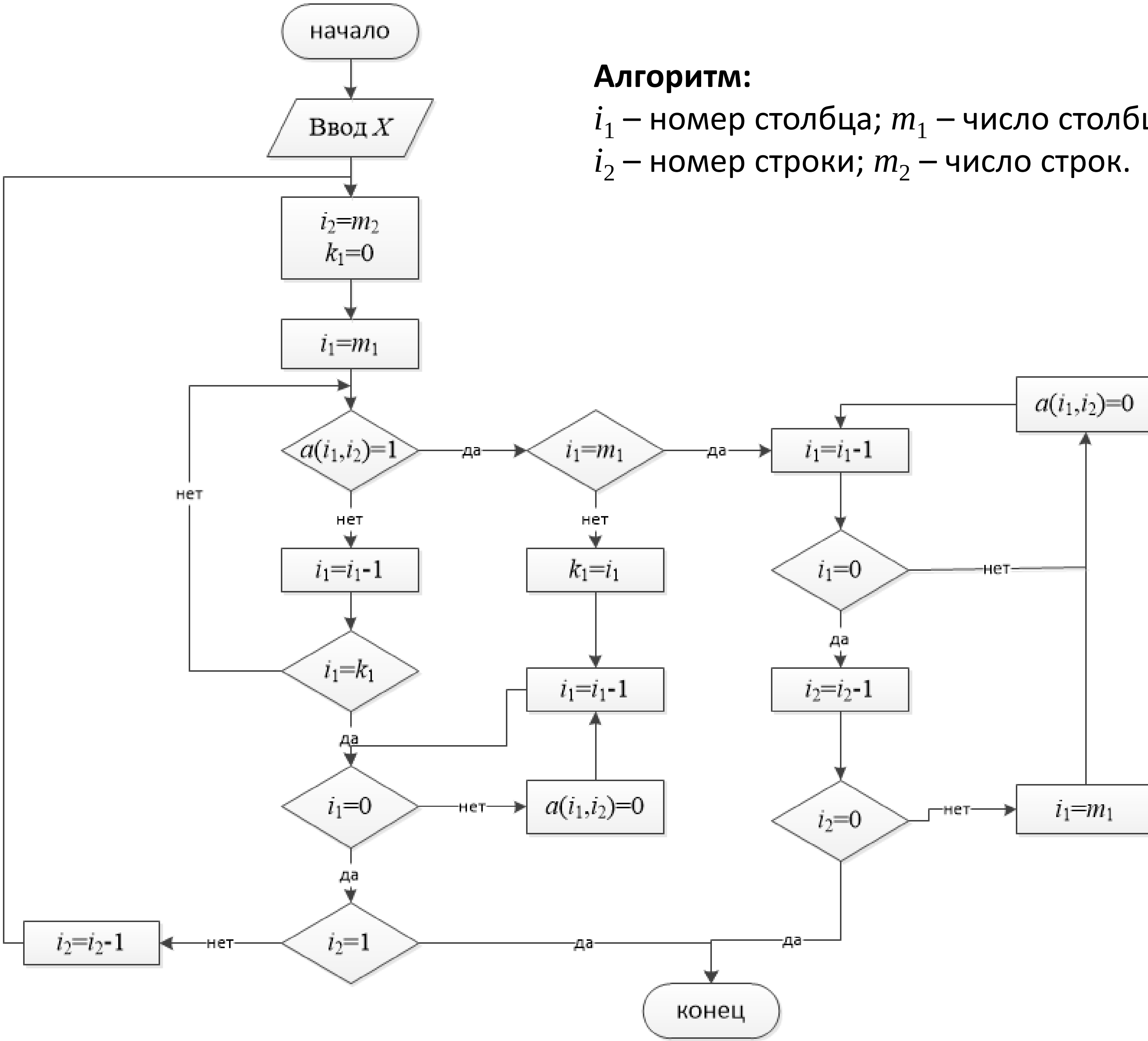
- **Метод выделения доминирующих точек**

1. Множество заключается в n-мерный гиперпараллелепипед, в котором назначаются координаты.
2. Множества описываются конечным образом с помощью некоторой n-мерной матрицы. Каждый элемент матрицы соответствует определённой точке исходного множества альтернатив.
3. Счет осуществляется снизу вверх.
4. Матрица содержит только 0 и 1: если точка принадлежит множеству альтернатив, то отображающий ее элемент получает индекс 1, и 0 – в противоположном случае.



$$n = 2;\ m_1 = 4;\ m_2 = 5$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Алгоритм:

i_1 – номер столбца; m_1 – число столбцов;

i_2 – номер строки; m_2 – число строк.

- **<u>Метод равномерно распределенных точек</u>**

Идея: Наилучшим образом формируется множество альтернатив X, а потом из него выделяется множество Парето.

Начальные данные:

– Параметрические ограничения $x_i{}^* < x_i \le x_i{}^{**}$, где $i = 1,2,\ldots, p$; p – количество параметров.
– Функциональные ограничения $f_l{}^* \le \Im_l(\vec{x}) \le f_l{}^{**}$, где $\Im_l(\vec{x})$ - функционал, используемый для описания системы; $l = 1,2,\ldots, L$; L – количество функционалов.

Ограничения на критерии $\Phi_j(\vec{x}) \le k_j{}^*, j = 1,2, \ldots, m$ определяются в ходе решения задачи.

Пусть в N-мерном кубе K имеется бесконечная последовательность точек $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots;\ P_i \in K$.

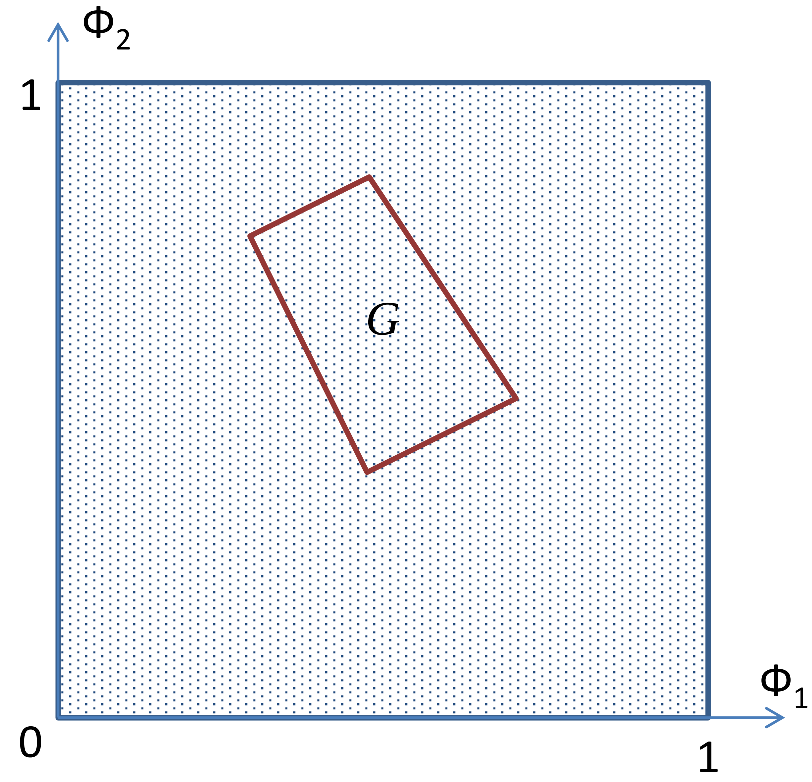
Выделим в K произвольную область G, имеющую n-мерный объем V_G.

В эту область попадает $S_n(G)$ точек с номерами $1 \le i \le N$.

Последовательность точек $P_i \in K$ называется равномерно распределенной в K, если для любой области $G \in K$ верно:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_n(G)}{N} = V_G$$

Равномерно распределенные последовательности дают возможность определить координаты пробных точек* в многомерном параллелепипеде пространства параметров:

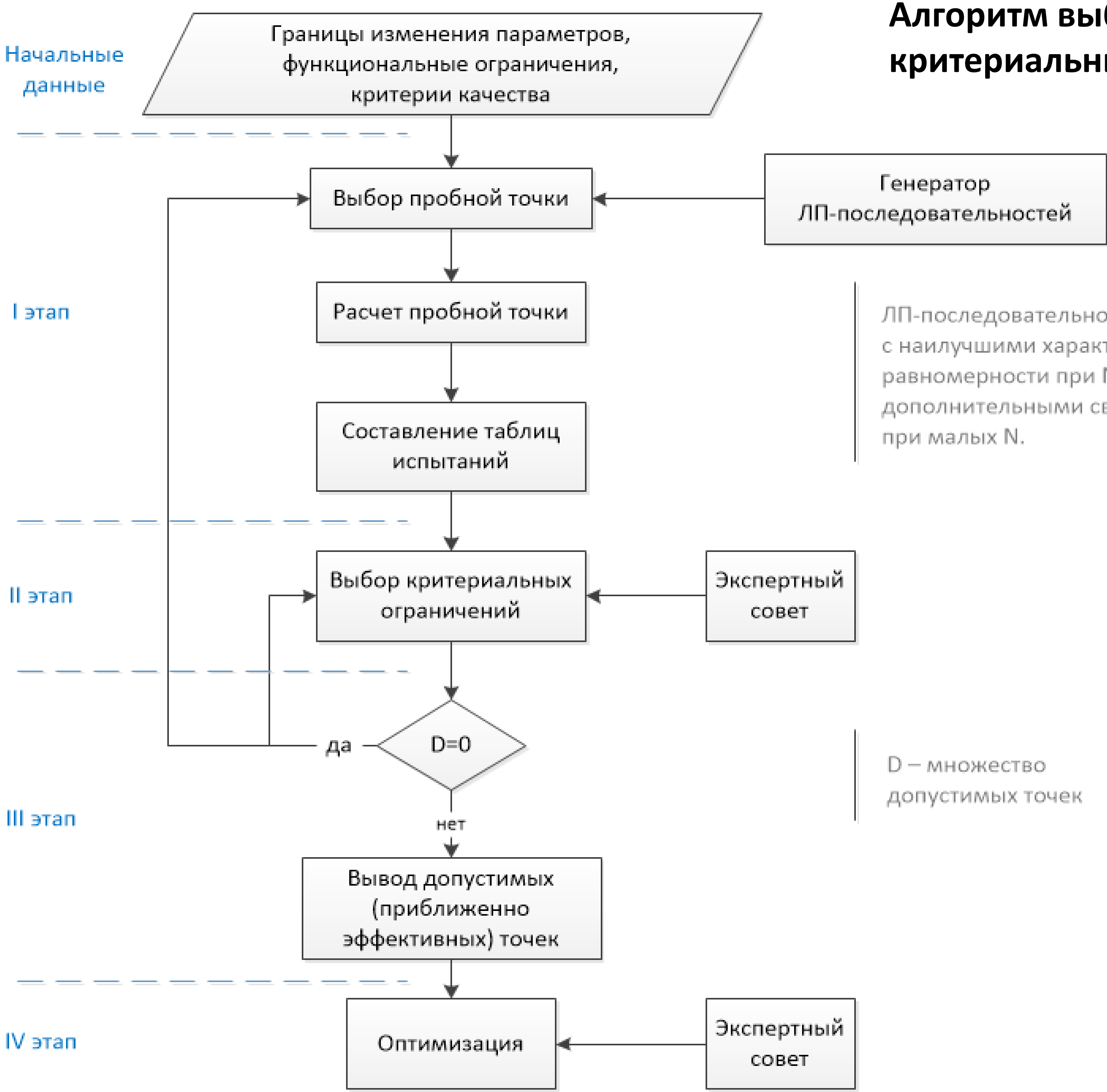


- в найденной точке $\vec{x}^{(0)}$ рассчитывается проектируемая система и проверяется выполнение функциональных ограничений.
- при выполнении ограничений точка назначается пробной
- при нарушении – исключается из дальнейшего рассмотрения

Таким образом получаем совокупное множество N пробных точек. Пробные точки, для которых установленные значения критериев удовлетворяют значениям критериев, образуют множество эффективных решений.

* Самостоятельно изучить вычисление направляющих чисел и получение пробных точек

Алгоритм выбора обоснованных критериальных ограничений



ЛП-последовательности – последовательности с наилучшими характеристиками равномерности при $N \to \infty$, обладающие дополнительными свойствами равномерности при малых N.

D – множество допустимых точек

Методы выбора оптимального решения

Для выбора оптимального решения из множества Парето требуется принять соглашение о возможных (целесообразных) компромиссах между критериями.

Для сужения множества Парето-оптимальных решений могут использоваться различные подходы. Наиболее часто применяются:

- **<u>Теория полезности</u>**

Выбирается скалярная целевая функция в виде аддитивной, мультипликативной или полилинейной функции полезности. Например,

$$F(k) = \sum_{j=1}^{m} c_j f_j\left(k_j\right),$$

где c_j - шкалирующие коэффициенты, $f_j\left(k_j\right)$ - одномерные функции полезности, являющиеся оценками полезности варианта системы по показателю качества k_j.

- **Теория нечетких множеств**

Примем, что невозможно определить понятие «наилучший вариант». Тогда множество оценок эффективности вариантов системы можно представить нечетким множеством

$$K = \left\{(k_1, k_2, \dots, k_m), \xi_{\vec{k}}(k_1, k_2, \dots, k_m)\right\},$$

которое является множеством подчиненных оценок, ранжированных по значениям функции принадлежности. Здесь

$$\xi_{\vec{k}}(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{1}{m}\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[\xi_{k_j}(k_j)\right]^{\beta}\right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

- функция принадлежности, дающая представление о о ценности конкретных значений относительно наилучших. В зависимости от значений параметра β реализуются классы функций:

- $\beta = 1$ – линейные аддитивные
- $\beta \to \infty$ - нелинейные зависимости

Нахождение экстремума скалярной целевой функции K позволяет выбрать единственный вариант.

- **<u>Лексико-графический подход</u>**

Метод скаляризации, позволяющий найти решение, обеспечивающее максимум (минимум) одного доминирующего (главного, существенного) показателя качества при всех остальных показателях, заданных в виде ограничений. Наиболее часто применимый в инженерной практике.

На критерии Φ_i вводятся ограничения $\Phi_i(\vec{x}) \geq {k_i}^*$, и назначается один критерий в качестве доминирующего $\Phi_1(\vec{x}) \rightarrow \max$; тогда целевая функция $F(\overrightarrow{\Phi}) = \Phi_1(\vec{x}) \rightarrow \max$.

<u>Проблематика:</u>

- Основания для выбора одного критерия в качестве доминирующего:

  // Критерий Φ_i может быть назван более важным чем Φ_j, если относительное изменение его оценки приводит к большему изменению предпочтительности решения. При этом обязательно совпадение шкал критериев по количеству единиц.

- Установление однозначных ограничений и допустимых значений для остальных критериев.

- **Линейная свертка** – метод скаляризации.

Целевая функция представляется в виде взвешенной суммы нормированных значений критериев:

$$\Phi\left(\overrightarrow{\Phi'}\right) = \sum_{i=1}^{m} C_i \Phi'_i(\vec{x}),$$

где $\overrightarrow{\Phi'} = [\Phi'_1, \dots, \Phi'_m]^T$; $\Phi'_i = \Phi_i / K_{i0}$ - нормированное к K_{i0}значение критерия Φ_i; K_{i0} - единица измерения i-го показателя; C_i - весовые коэффициенты важности, причем $\sum C_i = 1$.

Трудности: назначение коэффициентов C_i. Поэтому иногда используют соответствующие им критериальные функции G_{mi}, что позволяет привести размерность всех слагаемых суммы к относительным величинам.

Функции G_{mi} должны быть допустимыми преобразованиями критериев.

Для определения весовых коэффициентов используются:

- Метод экспертных оценок
- Метод линейного программирования

- **<u>Нормативный отбор</u>**– метод скаляризации.

Задается совокупность нормативов $(k_1, \dots, k_i, \dots, k_m)$и требуется подобрать параметры $\vec{x}$ из множества X так, чтобы выполнялись условия

$$\Phi_i(\vec{x}) \geq {k_j}^*, i = 1,2, \dots, m.$$

Для возможности проведения объективного сравнения проведем нормирование критериев по нормативам:

$$\Phi'_i(\vec{x}) = \frac{\Phi_i(\vec{x})}{{k_j}^*} \geq 1.$$

Требуется найти решение, при котором для каждой Φ'_i выполняется данное ограничение, а Φ'_i принимает максимально возможное значение.

Необходимо учесть преобразование всех критериев к стандартному виду, когда увеличение Φ_i обязательно приводит к увеличению предпочтительности решения.

Выполнение условия норматирования означает, что найденное решение относится к множеству допустимых.

- **Модифицированный минимаксный метод** – метод скаляризации.

В основе лежит допустимое преобразование критериев – шкала интервалов. Найдем минимально возможное значение i-го критерия $\Phi_{i\,min}$ пренебрегая значениями остальных m - 1 критериев. Тогда справедлива замена i-го критерия на соотношение:

$$G_{\text{ш}i_{\text{инт}}} = \gamma_i = \frac{\Phi_i - \Phi_{i\,min}}{\Phi_{i\,max}}.$$

Найдем

$$F_0\left(\overrightarrow{\Phi}\right) = \min_x \max_i (\gamma_1, \dots, \gamma_m),$$

которое и является решением задачи.

- **<u>Метод выборочных моментов</u>**

Обозначим $j = (1, \dots, r)$ – номер варианта $\vec{y}^{(j)}$и соответствующей альтернативы эффективного решения; $i = (1, \dots, m)$ - номер показателя качества. Все показатели качества приведем к к нормированным безразмерным величинам $0 \le \Phi'_{ij} \le 1$.

Сведем варианты в таблицу:

$$\vec{y}^{(1)} \to (\Phi'_{11}, \Phi'_{12}, \dots, \Phi'_{1m})$$

$$\dots$$

$$\vec{y}^{(j)} \to \left(\Phi'_{j1}, \Phi'_{j2}, \dots, \Phi'_{jm}\right)$$

$$\dots$$

$$\vec{y}^{(r)} \to (\Phi'_{r1}, \Phi'_{r2}, \dots, \Phi'_{rm})$$

Определим выборочное матожидание для каждого показателя качества:

$$\Phi'_{01} = \frac{\sum_{j=1}^{r} \Phi'_{ij}}{r}.$$

В результате получим среднее эффективное решение:

$$\vec{y}^{(0)} \Rightarrow (\Phi'_{01}, \Phi'_{02}, \dots, \Phi'_{0m})$$

Найдем матрицу отклонений показателей качества от выборочных средних:

$$\left|\Phi'_{ij} - \Phi'_{0j}\right| = \Delta_{ij}$$

Оптимальным считается такое решение, для которого сумма отклонений по всем показателям минимальна:

$$\sum_{i-1}^{n} \Delta_{ij} \to \min_{j}$$

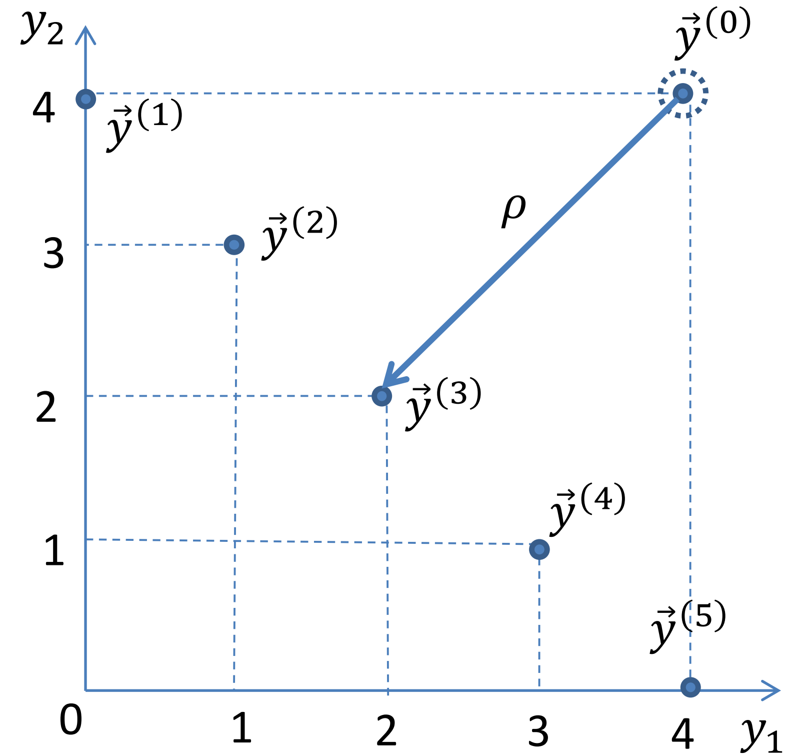
Если окажется более двух решений с одинаковыми значениями $\min_{j} \sum_i \Delta_{ij}$, то процедура повторяется.

Если найдено два таких решения, то необходимо провести сравнения отклонений по каждому показателю качества и принять оптимальным то решение, которое содержит наименьшее количество отклонений от выборочного среднего.

- **Метод идеальной точки**

Пусть существует гипотетическая точка $\vec{y}^{(0)}$, координаты которой (в двумерном пространстве) имеют максимально возможные значения, достижимые на множестве оценок – идеальная точка. Такая точка лежит вне множества Парето. Найдем для всех точек $\vec{y} \in P_\phi$ расстояние до $\vec{y}^{(0)}$:

$$\rho\left(\vec{y}, \vec{y}^{(0)}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left({y_i}^{(0)} - y_i\right)^2}\,.$$



За оптимальную точку примем ту, для которой указанное расстояние минимально на множестве Парето P_ϕ. Тогда функция выбора:

$$F = \min_{\vec{y} \in P_\phi} \rho\left(\vec{y}, \vec{y}^{(0)}\right),$$

что приводит к решению однокритериальной задачи:

$$\rho\left(\vec{y}, \vec{y}^{(0)}\right) \to \min_{\vec{y} \in P_\phi}$$

Задача может быть обобщена для произвольной метрики.

- <u>**Метод доминирующих критериев**</u>

Пусть существуют два решения $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$, тогда решение $\vec{x}^{(2)}$ предпочтительнее решения $\vec{x}^{(1)}$, если число оценок критериев, по которым $\vec{x}^{(2)}$ превосходит $\vec{x}^{(1)}$ больше, чем число оценок критериев, по которым $\vec{x}^{(1)}$ превосходит $\vec{x}^{(2)}$.

Т.е. для $\vec{x}^{(1)} \rightarrow \left(y_1{}^{(1)}, y_2{}^{(1)}, y_3{}^{(1)}, y_4{}^{(1)}, y_5{}^{(1)},\right)$ и $\vec{x}^{(2)} \rightarrow \left(y_1{}^{(2)}, y_2{}^{(2)}, y_3{}^{(2)}, y_4{}^{(2)}, y_5{}^{(2)},\right)$ выполняется

$y_1{}^{(2)} > y_1{}^{(1)}, y_2{}^{(2)} > y_2{}^{(1)}, y_4{}^{(2)} > y_4{}^{(1)}$ и $y_3{}^{(2)} < y_3{}^{(1)}, y_5{}^{(2)} < y_5{}^{(1)}$.

Таким образом, любую пару решений из множества X можно охарактеризовать двумя числами, выражающими количество оценок критериев, по которым одно решение превосходит другое.

Всегда найдется такое решение $\vec{x}^{*}$, для которого указанное число окажется максимальным. Тогда на множестве X можно задать числовую функцию, которая принимает значение, соответствующее найденному максимальному числу, что позволяет построить функцию выбора $F_{к}$, учитывающую количество доминирующих критериев.

Обозначим как $w\left(\vec{x}^{(i)}, \vec{x}^{(j)}\right)$ количество критериев, по которым вариант $\vec{x}^{(j)}$ превосходит вариант $\vec{x}^{(i)}$. Для всего множества альтернатив X найдем максимальное число:

$$Q_X\left(\vec{x}^{(i)}\right) = \max_{\vec{x}^{(j)} \in X} w\left(\vec{x}^{(i)}, \vec{x}^{(j)}\right)$$

Величина $Q_X\left(\vec{x}^{(i)}\right)$ называется доминирующим показателем варианта при предъявлении X. Чем меньше $Q_X(\vec{x}^{*})$, тем ближе по предпочтению варианты $\vec{x}^{(i)}$ и $\vec{x}^{(j)}$

Таким образом, функция выбора:

$$F_{\text{к}}(X) = \left\{\vec{x} \in X \middle| \max_{\vec{x}^{(j)} \in X} w\left(\vec{x}^{(i)}, \vec{x}^{(j)}\right) \to \min_{\vec{x}^{(j)} \in X} \right\}$$

Тогда доминирующий показатель множества X:

$$Q_X = \min_{\vec{x}^{(i)} \in X} \max_{\vec{x}^{(j)} \in X} w\left(\vec{x}^{(i)}, \vec{x}^{(j)}\right)$$